Akademie věd České republiky
Ústav teorie informace a automatizace

Academy of Sciences of the Czech Republic
Institute of Information Theory and Automation

RESEARCH REPORT

Jiří Michálek:

Matematický model kontrolního stanoviště montážní linky

No. 2277 březen 2010

ÚTIA AV ČR, P. O. Box 18, 182 08 Prague, Czech Republic
E-mail: utia@utia.cas.cz

Matematický model kontrolního stanoviště montážní linky

Tvorba modelu byla motivována reálným případem kontrolního bodu montážní linky, který v sobě obsahuje jednak testování výrobku a jednak demontáž a nutnou opravu výrobku, když nevyhověl testu. Vlastní montážní linka představuje jeden proud výrobků, které přicházejí jeden po druhém na místo testu, kde se případně provádí i několik oprav, resp. vyřazení, dokud výrobek neprojde testem. Některé výrobky tedy i nelze opravit a je nutno je vyřadit jako zmetek, který je pak podroben důkladné demontáži, aby se nalezla příčina neshody výrobku. Toto se provádí mimo montážní linku.

Samozřejmě, že si lze snadno představit víceproudovou montážní linku, která se skládá z několika paralelních proudů, které se buď vlévají do hlavního proudu ještě před dokončením montáže a zásobují hlavní proud anebo se setkávají dva či více na jednom místě, kde probíhá finální montáž a testy. Takovýmto případům se budeme věnovat v jiné zprávě.

Rozebereme situaci v jednoproudové montážní lince na jednotlivé stavy, ve kterých se výrobek může na lince při kontrole vyskytovat. Základním stavem je stav, kdy výrobek přijde na test a projde napoprvé. Označme takový stav OK. Dalším stavem je 1. oprava výrobku, který neprošel, označme takový stav jako R_1. Z tohoto stavu může výrobek přejít do stavu OK nebo do 2. opravy (stav R_2) nebo do S (zmetek). Výrobek může tedy dále přejít do stavu 3. opravy R_3 nebo do stavu S. Počet oprav je nutno omezit, např. na maximální počet 10, pak výrobek, který se nepodaří opravit, přechází do stavu S.

Tím jsme definovali stavy OK, R_1, $R_2, \ldots, R_N$, S a přechod mezi stavy se bude dít s určitými pravděpodobnostmi přechodu, a tím se dostáváme k modelu popsatelnému pomocí markovského procesu s těmito konečně mnoha stavy. Markovský proces je zcela jednoznačně definován počátečním rozdělením $\{a_j\}$, $a_j \geq 0$, $\sum_{j=0}^{N+1} a_j = 1$. Toto rozdělení znamená, že

$$\begin{aligned} &P\{X_0 = OK\} = a_0, \quad P\{X_0 = R_i\} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N \text{ a} \\ &P\{X_0 = S\} = a_{N+1}. \end{aligned}$$

Veličina X_0 představuje stav linky v počátečním čase 0 a maticí přechodu $\mathbb{P}$ typu $(N+2) \times (N+2)$, kde p_{ij} je pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j za jeden takt montážní linky. Takt linky může trvat různou dobu, protože buď je taktem doba testu, nebo doba i-té opravy nebo doba nutná na vyřazení výrobku jako zmetku.

Matice $\mathbb{P}$ pravděpodobností přechodu má následující tvar: (zde pro jednoduchost $N = 3$)

$$\mathbb{P} = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & OK & R_1 & R_2 & R_3 & S \\ OK & p_{00} & p_{01} & 0 & 0 & p_{04} \\ R_1 & p_{10} & 0 & p_{12} & 0 & p_{14} \\ R_2 & p_{20} & 0 & 0 & p_{23} & p_{24} \\ R_3 & p_{30} & 0 & 0 & 0 & p_{34} \\ S & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

Matice obsahuje 8 proměnných pravděpodobností, které musí splňovat následující vztahy:

$$
\begin{aligned}
p_{00} + p_{01} + p_{04} &= 1 \\
p_{10} + p_{12} + p_{14} &= 1 \\
p_{20} + p_{23} + p_{24} &= 1 \\
p_{30} + p_{34} &= 1.
\end{aligned}
$$

Ihned je vidět, že stav S je za této situace absorpční. To by ale znamenalo, že pokud by se montážní linka dostala do stavu S, pak by v tomto stavu setrvala, což neodpovídá realitě, protože i po vyřazení výrobku nastupuje další výrobek do testování. Je nutné toto respektovat a za stavu S mít možnost přejít do stavu OK s pravděpodobností 1, aby se linka nezastavila. I kdybychom ze stavu S udělali stav jiný nežli absorpční, přesto by to neodpovídalo realitě a je nutno množinu stavu více přiblížit realitě. Přidáme nový stav T, který představuje testování výrobku, kterým každý výrobek prochází.

Matice přechodu pak může vypadat následovně:

$$
\mathbb{P} = \left|\begin{array}{c||c|c|c|c|c|c|}
 & T & OK & R_1 & R_2 & R_3 & S \\
T & 0 & * & * & 0 & 0 & * \\
OK & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
R_1 & 0 & * & 0 & * & 0 & * \\
R_2 & 0 & * & 0 & 0 & * & * \\
R_3 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & * \\
S & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right.
$$

Symbol $*$ představuje nenulové pravděpodobnosti přechodu.

Nyní lze do hry zapojit délku jednolivých taktů, které jsou samozřejmě náhodnými veličinami, jejichž rozdělení se obecně může lišit i v typu rozdělení. Protože se během testů a montáže mohou objevit jisté prodlevy či zdržení, pro popis délky taktů se spíše hodí rozdělení typu log-normálního nebo Weibullova.

S každou dvojicí po sobě bezprostředně následujících stavů je spojen takt výrobní linky v tom smyslu, že je této dvojici přiřazena doba trvání přechodu. Tam, kde je pravděpodobnost přechodu nulová, je též nulová doba setrvání ve stavu. Tedy pro výpočet délky doby setrvání v určitém stavu lze v tomto případě uvažovat 4 základní doby, a to délku vlastního testu $\tau(T)$, dobu opravy $\tau(R)$, dobu uložení OK výrobku $\tau(OK)$ a dobu vyřazení zmetku $\tau(S)$.

Pak doby následujících setrvání ve stavech procesu a přechod do jiného stavu lze pomocí výše uvedených 4 dob vyjádřit následobně:

$$
\begin{array}{lcl}
T \to OK & \cdots & \tau(T) + \tau(OK) \\
T \to R_1 & \cdots & \tau(T) \\
R_1 \to OK & \cdots & \tau(R) + \tau(OK) + \tau(T) \\
R_1 \to R_2 & \cdots & \tau(R) + \tau(T) \\
R_2 \to OK & \cdots & \tau(R) + \tau(T) + \tau(OK) \\
R_2 \to R_3 & \cdots & \tau(R) + \tau(T) \\
R_3 \to OK & \cdots & \tau(R) + \tau(T) + \tau(OK) \\
R_3 \to S & \cdots & \tau(R) + \tau(S).
\end{array}
$$

Na základě tohoto rozboru je nutno zachovat některé ostré nerovnosti mezi dobami, protože např. přechod $R_1 \to OK$ v sobě obsahuje dobu testu, který je nutný po každé opravě.

Situace by se mohla ještě zjemnit na možnost aranžovat pravděpodobnost přechodu $R_i \to T$ spojenou s dobou trvání testu a dále pak přechod $T \to OK$ nebo $T \to R_{i+1}$ na další opravu. Abychom situaci nekomplikovali, budeme ve stavu opravy vyžadovat, že se automaticky po znovusmontování provádí test. Tím pádem doba přidělená opravě musí být součtem doby vlastní opravy a doby trvání testu po provedené opravě.

Klasifikace stavů

Řetězec popisující chod montážní linky je samozřejmě konečný a neperiodický. Protože každý stav je dosažitelný z každého jiného stavu, tj. existuje cesta s kladnou pravděpodobností, že ze stavu E_i se dostaneme do stavu E_j, $i \neq j$ pro každou takovou dvojici stavů, řetězec je nerozložitelný. Aperiodičnost a nerozložitelnost spolu s konečným počtem stavů zaručuje, že všechny stavy nemohou být přechodné, tj. musí existovat alespoň jeden stav trvalý. To ale zaručuje, že všechny stavy řetězce musí být ergodické, tedy trvalé, neperiodické a nenulové. Ergodicita stavů impikuje existenci

$$\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)} = u_k > 0,$$

kde

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{\mu_k}, \\ \mu_k &= \sum_{j=1}^{\infty} j\, f_{kk}^{(j)}, \end{aligned}$$

je střední počet taktů do 1. návratu ze stavu E_k do téhož stavu E_k. Číslo $f_{kk}^{(j)}$ je pravděpodobnost, s jakou proběhne 1. návrat do stavu E_k právě za j taktů. Protože všechny stavy jsou trvalé, pak skutečně musí platit

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{kk}^{(j)} = 1$$

pro každý stav E_k.

Čísla $\{u_k\}$ představují tzv. stacionární rozdělení pravděpodobnosti, která splňují soustavu lineárních rovnic

$$(*) \qquad u_k = \sum_i u_i\, p_{ik}.$$

V tomto případě je stacionární rozdělení jediné.

Odvodíme, jak vypadá stacionární rozdělení v tomto případě markovského řetězce. Když rozepíšeme rovnice $(*)$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, 6$, dostaneme následující soustavu lineárních rovnic: (označení $p(E_i, E_j)$ je pravděpodobnost přechodu ze stavu E_i do stavu E_j)

$$
\begin{aligned}
u_1 &= u_2 + u_6 \\
u_2 &= u_1 p(T, OK) + u_3 p(R_1, OK) + u_4 p(R_2, OK) + u_5 p(R_3, OK) \\
u_3 &= u_1 p(T, R_1) \\
u_4 &= u_3 p(R_1, R_2) \\
u_5 &= u_4 p(R_2, R_3) \\
u_6 &= u_1 p(T, S) + u_3 p(R_1, S) + u_4 p(R_2, S) + u_3 p(R_3, S).
\end{aligned}
$$

Soustava je řešena za podmínek $u_i > 0$ a $\sum_{i=1}^{6} u_i = 1$.

Postupným dosazováním jednodušších rovnic do složitějších získáme nakonec řešení:

Označme

$$
\begin{aligned}
&A_1 = 1, \quad A_2 = p(T, OK) + p(T, R_1)\, p(R_1, OK) + p(T, R_1)\, p(R_1, R_2)\, p(R_1, OK) \\
&\qquad\qquad\quad + p(T, R_1)\, p(R_1, R_2)\, p(R_2, R_3)\, p(R_3, OK) \\
&A_3 = p(T, R_1), \quad A_4 = p(T, R_1)\, p(R_1, R_2), \quad A_5 = p(T, R_1)\, p(R_1, R_2)\, p(R_2, R_3) \\
&A_6 = p(T, S) + p(T, R_1)\, p(R_1, S) + p(T, R_1)\, p(R_1, R_2)\, p(R_2, S) \\
&\qquad\qquad\quad + p(t, R_1)\, p(R_1, R_2)\, p(R_2, R_3)\, p(R_3, S).
\end{aligned}
$$

Pak

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6} \\
u_2 &= \frac{p(T, 0K) + A_3 p(R, OK) + A_4 p(R_2, OK) + A_5 p(R_3, OK)}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6} \\
u_3 &= \frac{A_3}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6} \\
u_4 &= \frac{A_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6} \\
u_5 &= \frac{A_5}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6} \\
u_6 &= \frac{p(T, S) + A_3 p(R_1, S) + A_4 p(R_2, S) + A_5 p(R_3, S)}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6}.
\end{aligned}
$$

V reálném případě proces začíná vždy ve stavu T, kdy je výrobek na začátku testován. Stav T je de facto nejdůležitějším stavem, protože každý výrobek jím musí projít. Jak tedy vypadá pravděpodobnost 1. návratu ze stavu T do T za jednotlivá časová období $n = 1, 2, 3, \ldots$. Nechť tedy $f^{(n)}(T, T)$ značí pravděpodobnost 1. návratu do stavu T ze stavu T za n kroků. Je jasné, že

$$
f^{(1)}(T, T) = 0, \qquad f^{(2)}(T, T) = p(T, OK) + p(T, S)
$$

$$
\begin{aligned}
f^{(3)}(T,T) &= p(T,R_1)\,p(R_1,OK) + p(T,R_1)\,p(R_1,S)\\
f^{(4)}(T,T) &= p(T,R_1)\,p(R_1,R_2)\,p(R_2,OK) + p(T,R_1)\,p(R_1,R_2)\,p(R_2,S)\\
f^{(5)}(T,T) &= p(T,R_1)\,p(R_1,R_2)\,p(R_2,R_3)\,p(R_3,OK)\\
&\qquad\qquad +p(T,R_1)\,p(R_1,R_2)\,p(R_2,R_3)\,p(R_3,S)\\
f^{(n)}(T,T) &= 0 \quad \text{pro } n \geq 6.
\end{aligned}
$$

Výše uvedené pravděpodobnosti se získají snadným rozdělením možných cest ze stavu T do T napoprvé.

Model systému pomocí semimarkovského řetězce

Obecné pojmy. Mějme dán systém, který v čase přechází z jednoho stavu do jiného, přičemž v každém stavu setrvává náhodně dlouho. Celkový počet stavů může být teoreticky i nekonečný. My ale budeme předpokládat vždy konečný počet stavů, budeme je značit přirozenými čísly $i = 1, 2, 3, \ldots, k$.

Nechť $Q_{ij}(t)$ značí pravděpodobnost s jakou se systém ze stavu i dostane do stavu j za dobu nejvýše rovnou t. Je jasné, že $Q_{ij}(t) \geq 0$ pro každé t a dále nechť

$$
Q_{ij}(\infty) = \lim_{t\to\infty} Q_{ij}(t) = \sup_{t\geq 0} Q_{ij}(t).
$$

Zřejmě $\sum_{j=1}^{k} Q_{ij}(\infty) = 1$, lze tedy $Q_{ij}(\infty)$ interpretovat jako pravděpodobnost P_{ij}, že systém ze stavu i se dostane někdy do stavu j. Matice $\mathbb{P} = \{P_{ij}\}_{j=1}^{k}$ pak představuje matici přechodu markovského řetězce složeného z posloupnosti stavů $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_q$, kde $\mathcal{I}_\ell \in \{1, 2, \ldots, k\}$ a platí

$$
P\{\mathcal{I}_{n+1} = j \,|\, \mathcal{I}_n = i\} = P_{ij},
$$

$P\{\mathcal{I}_0 = i\}$ je pak počáteční rozdělení pravděpodobnosti řetězce. Nechť $\tau(i)$ značí náhodný čas setrvání řetězce ve stavu i. Nechť dále

$$
H_i(t) = P\{\tau(i) \leq t\}
$$

je příslušná distribuční funkce. Budeme předpokládat, což je pro praxi celkem přirozené, že $P_{ii} = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$. Pak platí zřejmý, ale důležitý vztah

$$
P\{\tau(i) > t\} + \sum_{j\neq i} Q_{ij}(t) = 1,
$$

tedy

$$
H_i(t) = \sum_{j\neq i} Q_{ij}(t).
$$

Označme $\mathcal{Z}(t) = \mathcal{I}_{N(t)}$, kde $N(t) = \sum_{j=1}^{k} N_j(t)$, přičemž

$$
N_j(t) = \text{počet přechodů do stavu } j \text{ v čase } \langle 0, t\rangle.
$$

Pak náhodný proces $\{\mathcal{I}(t),\, t \geq 0\}$ je semimarkovský řetězec a markovský řetězec $\{\mathcal{I}_n\}_{n\geq 0}$ se nazývá vnořený markovský řetězec. Semimarkovský řetězec je tedy určen vnořeným markovským řetězcem a dobami setrvání ve svých stavech. Pro další budeme potřebovat

$$\mathcal{G}_{ij}(t) = P\left\{N_j(t) > 0 \,|\, \mathcal{Z}(0) = i\right\},$$

tedy pravděpodobnost výskytu prvního přechodu do stavu j během času t, když výchozí stav byl i. Obecně nemusí být $\mathcal{G}_{ij}(\infty) = 1$, pokud ano, jedná se pak o rozdělení pravděpodobnosti a lze uvažovat 1. moment, pokud bude konečný

$$\mu_{ij} = \int_0^\infty t \,\mathrm{d}\mathcal{G}_{ij}(t),$$

což je střední doba prvního přechodu do stavu j, když na začátku byl systém ve stavu i.

Pro nás bude daleko zajímavější případ, když $i = j$, tedy

$$\mu_{ii} = \int_0^\infty t \,\mathrm{d}\mathcal{G}_{ii}(t),$$

což je střední doba prvního návratu do stavu i, když systém vyšel ze stavu i.

V semimarkovském řetězci nazýváme dva stavy komunikativní, když

$$\mathcal{G}_{ij}(\infty) > 0 \;\wedge\; \mathcal{G}_{ji}(\infty) > 0$$

Navzájem komunikativní stavy tvoří třídu ekvivalence. Řetězec je nerozložitelný, pokud všechny jeho stavy tvoří jednu třídu ekvivalence.

Stav i je rekurentní, když $\mathcal{G}_{ii}(\infty) = 1$, jinak je přechodný. Pokud navíc je $\mu_{ii} < \infty$, stav se nazývá pozitivně rekurentní, když $\mu_{ii} = +\infty$, pak je to nulový stav. (Pozitivně rekurentní je též označen jako ergodický.)

Platí základní vztah mezi semimarkovským řetězcem a jeho vnořeným markovským řetězcem, že stav je rekurentní (přechodný, komunikativní se stavem j) v semimarkovském řetězci, právě když má tutéž vlastnost ve vnořeném markovském řetězci.

Aplikace na model kontrolního stanoviště montážní linky

V příkladu, který je ve zprávě analyzován jako ilustrační, máme celkem 6 stavů, tedy $k = 6$. Budeme uvažovat semimarkovský řetězec, jehož zadání je dáno vztahy

$$Q_{ij}(t) = P_{ij}\, P\left\{\tau(i) \leq t\right\}.$$

kde matice $\mathbb{P} = \{P_{ij}\}_{ij=1}^k$ je popsána v předchozích kapitolách zprávy. Pro rozdělení náhodného času $\tau(i)$ lze v praxi uvažovat hlavně model popsaný lognormálním nebo Weibullovým rozdělením se vhodnými parametry, které by byly odhadnuty na základě měření konkrétních operací na lince. V některých případech by se dal použít i model normálního rozdělení.

Pro chování modelu linky v závislosti na volbě pravděpodobností P_{ij} a rozdělení dob setrvávání ve stavech jsou nejdůležitější veličiny $\mathcal{G}_{ij}(t)$. Pro jejich výpočet je nutno popsat všechny možné cesty nejkratší délky vedoucí od stavu i do stavu j. Nejkratší cesta vedoucí ze stavu i do stavu j znamená možnost prvního výskytu stavu j při startu ve stavu i. Ukažme si to na příkladu z našeho modelu. Nechť $i = T$, $j = OK$. Pak máme jednak 4 nejkratší cesty z T do OK přímo,

$$\begin{array}{lcl} T & \to & OK \\ T & \to & R_1 \to OK \\ T & \to & R_1 \to R_2 \to OK \\ T & \to & R_1 \to R_2 \to R_3 \to OK \end{array}$$

a jednak nepřímé cesty, které nejdřív projdou stavem S a pak se teprve dostane systém do stavu OK. Ze stavu T do stavu S vede jediná cesta $T \to R_1 \to R_2 \to R_3 \to S$, když nebudeme uvažovat nenulové pravděpodobnosti přechodu pro $R_1 \to S$, $R_2 \to S$. Výskyt cesty do S má pravděpodobnost

$$p(T \to S) = p(T, R_1)\, p(R_1, R_2)\, p(R_2, R_3)\, p(R_3, S)$$

a k tomu odpovídající čas trvání této cesty

$$\tau(T \to S) = \tau(T) + \tau(R_1) + \tau(R_2) + \tau(R_3) + \tau(S).$$

Pak cesta ze stavu T do stavu OK přes stav S má obecný tvar

$$(T \to S)^n\, (T \to OK), \quad n = 1, 2, \ldots$$

a celková doba cesty z $T \to OK$ při n opakování $(T \to S)$ je

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_i(T \to S) + \tau(T \to OK).$$

Po tomto rozboru se distribuční funkce nejkratšího přechodu ze stavu T do stavu OK rovná:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{T,0K}(t) \;=\; & p(T, OK)\, P\{\tau(T) \le t\} + p(T, R_1)\, p(R_1, OK)\, P\{\tau(T) + \tau(R_1) \le t\} \\ & + p(T, R_1)\, p(R_1, R_2)\, p(R_2, OK)\, P\{\tau(T) + \tau(R_1) + \tau(R_2) \le t\} \\ & + p(T, R_1)\, p(R_1, R_2)\, p(R_2, R_3)\, p(R_3, OK) \times \\ & \quad \times P\{\tau(T) + \tau(R_1) + \tau(R_2) + \tau(R_3) \le t\} \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} p(T \to S)^j \left[p(T, OK)\, P\left\{ \sum_{j=1}^{j} \tau_i(T \to S) + \tau(T) \le t \right\} \right. \\ & + \; p(T, R_1)\, p(R, OK)\, P\left\{ \sum_{i=1}^{j} \tau_i(T \to S) + \tau(T) + \tau(R_1) \le t \right\} \\ & + \; p(T, R_1)\, p(R_1, R_2)\, (R_2, OK) \times \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times P\left\{\sum_{j=1}^{j}\tau_i(T-S)+\tau(T)+\tau(R_1)+\tau(R_2)\leq t\right\}\\
+\;&p(T,R_1)\,P(R_1,R_2)\,p(R_2,R_3)\,p(R_3,OK)\times\\
&\times P\left\{\sum_{i=1}^{j}\tau_i(T\to S)+\tau(T)+\tau(R_1)+\tau(R_2)+\tau(R_3)\leq t\right\}\Bigg].
\end{aligned}
$$

Protože lze předpokládat, že $P\{T \to S\}$ je obvykle malá, blízká k nule, pak nekonečná řada může být pro praktické účely zanedbatelná. Lze předpokládat, že veličiny popisující setrvání v jednotlivých stavech linky jsou navzájem nezávislé.

Vyznačme jako základní cyklus linky přechod ze stavu T opět do stavu T, který představuje vyprodukování shodného výrobku na lince. Samozřejmě nás zajímá střední doba takovéhoto cyklu, která vlastně představuje střední dobu potřebnou ke vyprodukování shodného výrobku. Musíme znát tedy veličinu $\mathcal{G}_{TT}(t)$, která se od veličiny $\mathcal{G}_{T,OK}(t)$ liší pouze v tom, že ve vzorcích se přičte ještě doba setrvání ve stavu OK, tedy $\tau(OK)$, tedy doba potřebná k signifikaci vhodného výrobku a jeho uložení do patřičné přepravky, palety nebo nádoby. Pak tedy symbolicky

$$
\mu_{TT}=\sum_{\substack{\text{nejkratší}\\\text{cesty}}} P\left\{\text{nejkratší cesta } T\to T\right\}\int_0^\infty t\,\mathrm{d}P\left\{\text{doba nejkratší cesty}\leq t\right\}.
$$

Zde se objevuje jeden problém, a to v tom, že ve vyjádření doby nejkratší cesty se vyskytuje součet vzájemně nezávislých dob, které jsou popsány např. Weibullovými rozděleními s různými parametry. Zde se projevuje výhoda normálního rozdělení, protože v součtu opět vyjde normální rozdělení.

Průběh celého chodu kontrolního stanoviště se tak rozpadá na sekvenci základních cyklů $T \to T$, které lze považovat obvykle za nezávislé. Protože pravděpodobnostní povaha cyklu se časem nemění, lze celý semimarkovský proces chápat jako regenerační proces, kdy čas vstupu do stavu T znamená pravděpodobnostní repliku předcházejících základních cyklů.

Základní cyklus $T \to T$ má pouze dva výsledky, a to stav OK či stav S. Pravděpodobnost výskytu cyklu s výstupem OK je rovna

$$
\begin{aligned}
P\{(T\to T)=OK\} &= p(T,OK)+p(T,R_1)\,P(R_1,OK)+p(T,R_1)\,p(R_1,R_2)\,p(R_2,OK)\\
&\quad+p(T,R_1)\,p(R_1,R_2)\,p(R_2,R_3)\,p(R_3,OK),
\end{aligned}
$$

pak tedy

$$
\begin{aligned}
P\{(T\to T)=S\} &= p(T,R_1)\,p(R_1,R_2)\,p(R_2,R_3)\,p(R_3,S)\\
&= 1-P\{(T\to T)=OK\}.
\end{aligned}
$$

Lze tedy snadno odvodit rozložení doby trvání cyklu $(T \to T)$:

$$
P\{\tau(T\to T)\leq t\}=p((T\to S))\,P\{\tau(T\to S)\leq t\}+p((T\to OK))\,P\{\tau(T\to OK)\leq t\}.
$$

Je ihned zřejmé, že lze na cyklus pohlížet jako na náhodnou veličinu se dvěma stavy $(T \to T) = OK$ a $(T \to T) = S$ s výše zadanými pravděpodobnostmi. Tento fakt lze využít pro odhad střední doby výskytu stavu S v procesu, tedy střední doby mezi dvěma zmetky. Výskyt cyklu s výstupem S lze popsat pomocí geometrického rozdělení, tedy

$$P\{(T \to T) = S \text{ poprvé po } n \text{ cyklech } (T \to T) = OK\} = q\,p^n, \;\; n = 0, 1, \ldots,$$

kde $q = 1 - p$ a $p =$ pravděpodobnost výskytu cyklu $(T \to T) = OK$. Pak střední doba mezi dvěma stavy S je rovna střední hodnotě výše uvažovaného geometrického rozdělení, tedy hodnotě

$$\frac{1-q}{q}.$$

Vhodná rozdělení pro modelování doby setrvání ve stavu

Je samozřejmé, že zde je nutno začít od naměřených dat, která dají zásadní informaci o volbě modelu popisujícího náhodné chování oby setrvání v některém stavu. Měření by měla probíhat prakticky za stálých podmínek pro získání vhodného modelu, ale na druhou stranu nelze ignorovat výjimečná a odlehlá pozorování, resp. jejich četnost, kdy dochází na lince při dané operaci (tedy stavu systému) k nějaké mimořádné situaci, která se může objevit a nelze ji zcela z procesu eliminovat. Pokud by bylo možno tyto odlehlé hodnoty vyvolané nějakými problémy na lince vysvětlit modelem rozdělení s těžkým chvostem, byla by situace jednodušší, jinak by se musel použít model se směsí dvou rozdělení, jedno s váhou daleko větší by popisovalo běžnou situaci průběhu v daném stavu na lince, druhé rozdělení s vahou menší by popisovalo právě ony mimořádně dlouhé doby setrvání systému v onom stavu.

Je možno uvažovat i takové stavy, kdy tyto situace nepřipadají s velkou pravděpodobností v úvahu, např. stav OK, kdy je shodný výrobek pouze označen a uložen do patřičné expediční bedny. V takovýchto případech by se dalo uvažovat i normální rozdělení s určitou střední hodnotou a relativně malým rozptylem.

Logaritmicko-normální rozdělení

Aplikuje se tam, kde náhodná veličina Y nabývá spojitých hodnot teoreticky v intervalu od 0 do $+\infty$.

Náhodná veličina Y má v tomto případě logaritmicko-normální rozdělení (log-normální rozdělení) $LN(\mu, \sigma^2)$ s parametry μ a σ^2.

Potom je

hustota pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{1}{\sigma\, y\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}} && \text{pro } y > 0, \\ &= 0 && \text{pro } y \leq 0; \end{aligned}$$

distribuční funkce

$$G(y) = \int_0^y \frac{1}{\sigma\, u\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\ln z-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}z;$$

střední hodnota

$$E(Y) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}};$$

rozptyl

$$\begin{aligned} D(Y) &= e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} \\ &= E^2(Y) * \{e^{\sigma^2} - 1\}. \end{aligned}$$

Náhodná veličina $X = \ln Y$ má normální rozdělení $N(\mu, \sigma)$, kde střední hodnota $E(X) = E(\ln Y) = \mu$ a rozptyl $D(X) = D(\ln Y) = \sigma^2$. ($\ln Y$ značí přirozený logaritmus Y, tedy logaritmus při základu e.)

Odhady parametrů μ a σ na základě náhodného výběru rozsahu n (pozorované hodnoty jsou $y_1, y_2, \ldots, y_n$):

- **Postup A:**

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln y_i$$

a

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\ln y_i - \hat{\mu})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(\ln y_i)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln y_i\right)^2\right].$$

Poznámka: Položíme-li ve výrazu pro distribuční funkci log-normálního rozdělení $u = \frac{\ln y-\mu}{\sigma}$, potom $\mathrm{d}u = (1/\sigma y)\,\mathrm{d}y$. Distribuční funkce $G(y)$ přechází na distribuční funkci normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$, tj. $\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-y^2}{2}}\,\mathrm{d}y$.

- **Postup B:**

$$\mu_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \quad \text{a} \quad \mu_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2,$$

$$\hat{\sigma}^2 = \ln(\mu_2/\mu_1^2) \quad \text{a} \quad \hat{\mu} = \ln\mu_1 - \tfrac{1}{2}\hat{\sigma}^2.$$

- **Postup C:**

$$\begin{aligned} \overline{y} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \\ s_y^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2, \end{aligned}$$

potom

$$\hat{\sigma}^2 = \ln\left(\frac{(n-1)\,s_y^2}{n\,\overline{y}^2}+1\right),$$
$$\hat{\mu} = \ln\overline{y}-\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2.$$

Kvantil y_α náhodné veličiny Y mající log-normální rozdělení $LN(\mu,\sigma^2)$ je roven

$$y_\alpha = e^{(\mu+u_\alpha\sigma)},$$

kde u_α je α-kvantil normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$. Je totiž

$$\Phi(u_\alpha)=\int_{-\infty}^{\frac{\ln y_\alpha-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u=\alpha$$

a

$$u_\alpha=(\ln y_\alpha-\mu)/\sigma \quad \text{a tedy} \quad \ln y_\alpha=\mu+u_\alpha\sigma.$$

V praxi bývá dosti často výhodné do rozdělení lognormálního zabudovat ještě třetí parametr, parametr polohy θ, který představuje posunutí hustoty rozdělení vpravo od nuly. Pak taková náhodná veličina nabývá pouze hodnot větších nežli θ, pod touto hodnotou je hustota rozdělení nulová. Dosti často je hodnota tohoto parametru přesně známa, protože často se jedná o dolní hranici nebo předepsanou mez, pod níž se hodnoty náhodné veličiny nemohou objevit. Tento případ lze uvažovat i v našem případě, dolní hranice je představována minimální dobou, po kterou systém může zůstat v daném stavu. Vzorec pro hustotu se změní pouze v tom, že místo proměnné y uvažujeme proměnnou $y-\theta$. Rovněž pak do odhadů místo hodnot y dosadíme hodnoty $y-\theta$.

Weibullovo rozdělení

Má-li náhodná veličina X, která nabývá hodnot $x>c$, Weibullovo rozdělení s parametry a, b, c, potom je její

hustota pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{b}{a}\left(\frac{x-c}{a}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{x-c}{a}\right)^b} \quad \text{pro } x>c,$$
$$= 0 \quad \text{pro } x\le c;$$

distribuční funkce

$$F(x) = 1-e^{-\left(\frac{x-c}{a}\right)^b} \quad \text{pro } x>c,$$
$$= 0 \quad \text{pro } x\le c;$$

střední hodnota

$$E(\omega) = a\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) + c;$$

rozptyl

$$D(\omega) = a^2 \left\{\Gamma\left(1 + \frac{2}{b} - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)\right]^2\right)\right\}.$$

Význam jednotlivých parametrů:
parametr $a > 0$ je parametrem měřítka;
parametr $b > 0$ je parametrem tvaru rozdělení,
je-li $b = 1$, potom se jedná o exponenciální rozdělení,
je-li $b = 2$, potom se jedná o Rayleighovo rozdělení;
parametr $c \geq 0$ je parametrem polohy, v mnoha případech se klade $c = 0$.

Odhady parametrů a, b, c i střední hodnota $E(X)$ a rozptylu $D(X)$ jsou uvedeny např. v normě ČSN 01 0224, kde jsou i patřičné tabulky.

Pro $b = 0,2$ až 15 jsou tabelovány pomocné hodnoty

$$K_b = \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) \quad \text{a} \quad g_b = \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{b} - K_b^2\right)\right)^{1/2}.$$

Potom je $E(X) = a\,K_b + c$ a $D(X) = a^2\,g_b^2$.

Kvantil x_α náhodné veličiny X mající Weibullovo rozdělení s parametry a, b, c je roven:

$$x_\alpha = a\,[-\ln(1-\alpha)]^{1/b} + c.$$

Odhady parametrů a, b, c z náhodného výběru rozsahu n (pozorované hodnoty jsou $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

A) Bodový odhad parametru a při známých parametrech b i c:

$$\hat{a} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^b}{n}\right)^{1/b}.$$

B) Bodový odhad parametrů a, b při známém parametru c:

$$\hat{b} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\, s_y^{-1} \cong 1,28255/s_y$$
$$\hat{a} = e^{\{\overline{y} + \frac{\gamma}{b}\}}, \quad \text{kde } \gamma = 0,577226$$

a kde

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i - c) \quad \text{a} \quad s_y = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} [\ln(x_i - c) - \overline{y}]^2}{n-1} \right\}.$$

Poznámka: Pro malé hodnoty n je potřeba odhad $\hat{b}$ vynásobit faktorem nestrannosti $M(n)$ (viz příslušná tabulka v ČSN 010224).

C) Odhad parametrů a, c pro známé b:

je-li $b \leq 1$, potom

$$\hat{c} = x_{\min}; \quad \hat{a} = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{c})^b}{n} \right\}^{1/b};$$

je-li $b > 1$, potom

$$\hat{c} = \min\{c^x, x_{\min}\}; \quad \hat{a} = \frac{s}{g_b},$$

kde

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \quad s = \left\{ \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \right\}^{1/2}; \quad c^x = \overline{x} - \hat{a}\, K_b$$

a hodnoty K_b a g_b jsou tabelovány (viz tabulka v ČSN 01 0224).

D) Odhad parametrů a, b, c:

Vypočteme výběrový průměr $\overline{x}$, výběrovou směrodatnou odchylku s a statistiku

$$p = \frac{\frac{n}{(n-1)\,(n-2)} \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3}{s^3}.$$

Z tabulky v normě ČSN 01 0224 vyhledáme b, K_b, g_b pro vypočtenou hodnotu $\rho = \rho_b$. Potom dostáváme odhady:

$$\begin{array}{ll} \hat{b} = b, \quad \hat{a} = s/g_b, \quad \hat{c} = x_{\min} & \text{pro } \hat{b} \leq 1, \text{ resp.} \\ \hat{c} = \min\{c^x, x_{\min}\} & \text{pro } \hat{b} > 1. \end{array}$$

Ilustrační příklad

Tento příklad je inspirován konkrétním výrobním procesem, z něhož byla získána data z kontrolního stanoviště. Montážní linka provádí sestavování ventilů a na jejím konci se provádí 100 %tní kontrola pomocí několika testů. Data o výsledcích testů jsou automaticky sbírána a ukládána do databáze. K dispozici bylo dohromady 837 údajů, které byly zpracovány a jednotlivé výstupy z výsledků měření byly označeny symboly *OK*, *KO* a *OK*_0. Symbol *OK* značí, že test proběhl správně a výrobek je shodný s požadavky, symbol *KO* značí, že výrobek neprošel testem a byla nutná oprava, symbol *OK*_0 značí uvolnění výrobku po jeho opravení a otestování. Stav S (zmetek) zde nebyl zaveden, tudíž výrobek se může několikrát za sebou opravovat (např. 6 ×), nežli je opraven a uvolněn.
Ze záznamů byly zjištěny tyto skutečnosti:
přechod ze stavu T do stavu *OK* se uskutečnil 304 ×, přechod ze stavu T do stavu R_1

pak 199 ×. Přechod ze stavu R_1 do R_2 proběhl 79 ×, ze stavu R_1 do OK pak 120 ×. Ze stavu R_2 do stavu OK se systém dostal 49 ×, ze stavu R_2 do R_3 pak 30 ×. Z R_3 do OK systém proběhl 16 ×, ze stavu R_3 do R_4 se dostal 14 ×, z R_4 do OK pak 7 ×. Ze stavu R_4 do R_5 se systém dostal 3 ×, z R_5 do OK pak 4 ×, ze stavu R_5 do R_6 3 ×, z R_6 do OK 2 ×, z R_6 do R_7 pouze 1 ×, z R_7 do OK ani jednou, a nakonec R_7 do R_6 pouze jedenkrát a samozřejmě pak z R_8 do OK jedenkrát.

Na základě těchto dat byla sestavena následující matice 1 počtu přechodů ze stavu do stavu, která je typu 10 × 10.

Pomocí této tabulky byla vypracována tabulka 2 odhadů pravděpodobností přechodů mezi jednotlivými stavy vloženého markovského řetězce. Protože se zde nevyskytuje stav S (zmetek), pak je nutný přechod ze stavu R_8 do stavu OK s pravděpodobností 1.

V případě, že výrobky, které neprojdou úspěšně ze stavu R_3 do OK, zahrneme do stavu S, pak získáme zredukovanou tabulku 3, která může představovat modifikaci kontrolovaného systému montážní linky v tom smyslu, že se neprovádí kontrola až do úplného odstranění problému, ale provádí se pouze konstantní počet oprav (zde R_1, R_2, R_3). Tato modifikace může být zajímavá ze dvou důvodů, a to časových i nákladových. Kontrolní stanoviště je na konci linky, kterou je možno popsat pomocí Poissonova procesu s jistým parametrem λ (homogenní případ popisující stabilizovaný chod linky), kde tento parametr představuje očekávaný počet smontovaných výrobků za jednotku času. Pokud by za stejnou jednotku času byl očekávaný počet kontrolovaných kusů menší, pak by docházelo k hromadění kusů před kontrolním stanovištěm. Toto by se dalo odstranit tím, že se počet oprav omezí na předem daný počet (např. 3) a kusy, které neprojdou, jdou mezi zmetky. Druhý aspekt je ekonomický. Každá oprava něco stojí, čas a náklady, protože lze očekávat, že čím delší série oprav, tím větší pravděpodobnost zmetku, pak je otázka, co je ekonomičtější, zdali výrobek opravovat tak dlouho, až se to podaří, či opravy ukončit po pevném počtu oprav. Tyto otázky se právě dají velice dobře řešit pomocí simulací, kdy ke každému stavu je přiřazena nejenom doba jeho trvání, ale i ekonomické náklady, a jedná se pak o optimalizační úlohu.

V tomto příkladu se samozřejmě jedná o regenerační proces, kdy proces začíná ve stavu T a do stavu T se dostane vždy za stejného pravděpodobnostního schématu. Ze stavu T se cesty dělí na dvě možné, buď výrobek bude na konci ve stavu OK nebo skončí ve stavu S jako zmetek. Protože lze celkem snadno spočítat pravděpodobnosti jednotlivých větví těchto dvou cest, dojdeme k výsledku, že přechod $T \to OK$ má pravděpodobnost $P(T \to OK) = 0,9616$ a $P(T \to S)$ má tedy doplňkovou pravděpodobnost 0,0384.

Střední doba taktu $T \to T$ je pak dána obecně vzorcem

$$\sum_{\{\text{vš.cesty}\}} \text{Pst (výskytu cesty) } E \,\{\text{doba cesty}\}$$

a rozdělení pravděpodobnosti trvání taktu $T \to T$ je dáno vzorcem

$$\sum_{\{\text{vš.cesty}\}} \text{Pst } \{\text{výskytu cesty}\} \text{ Pst } \{\text{délka cesty} \leq t\}.$$

Máme tedy dva typy taktu, takt končící dobrým výrobkem, takt OK a takt končící zmetkem, takt S. Protože jednotlivé takty jsou mezi sebou stochasticky nezávislé (lze předpokládat, protože každý takt se týká jiného výrobku), lze se na výskyt taktu dívat jako na binomickou proměnnou s pravděpodobností p, která odpovídá výskytu taktu typu OK a $1-p$ znamená výskyt taktu typu S. Jaký je střední počet taktů mezi dvěma takty typu S? Jedná se o geometrické rozdělení, které vyjadřuje pravděpodobnost výskytu sekvence taktů typu OK končící taktem typu S.

$$P\{j \text{ taktů typu } OK \text{ za sebou a pak takt typu } S\} = p^j(1-p).$$

Pak střední počet taktů mezi dvěma takty typu S je

$$(1-p)\sum_{j=1}^{\infty} j\,p^j = \frac{p}{1-p}.$$

V našem případě to znamená, že tento střední počet je roven přibližně 25 taktů při $p = 0,9616$. Odtud plyne, že průměrná doba mezi dvěma stavy S je tedy přibližně $25 \times$ průměrná doba jednoho taktu. Průměrná, neboli střední doba jednoho taktu, bude konvexní kombinace středních dob taktu typu OK a taktu typu S, tedy

$$E\{\text{taktu } T \to T\} = p\,E\{(T \to OK)\} + (1-p)\,E\{T \to S\}.$$

Tabulka 1: Počty přechodů

	T	OK	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8
T	0	304	199	0	0	0	0	0	0	0
OK	503	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R_1	0	120	0	79	0	0	0	0	0	0
R_2	0	49	0	0	30	0	0	0	0	0
R_3	0	16	0	0	0	14	0	0	0	0
R_4	0	7	0	0	0	0	7	0	0	0
R_5	0	4	0	0	0	0	0	3	0	0
R_6	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0
R_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
R_8	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabulka 2: Pravděpodobnosti přechodů

	T	OK	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8
T	0	0,6044	0,3956	0	0	0	0	0	0	0
OK	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R_1	0	0,6030	0	0,3970	0	0	0	0	0	0
R_2	0	0,6203	0	0	0,3797	0	0	0	0	0
R_3	0	0,5333	0	0	0	0,4667	0	0	0	0
R_4	0	0,5000	0	0	0	0	0,500	0	0	0
R_5	0	0,5714	0	0	0	0	0	0,4286	0	0
R_6	0	0,6667	0	0	0	0	0	0	0,3333	0
R_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
R_8	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabulka 3: Zredukovaná matice pravděpodobností přechodů

	T	OK	R_1	R_2	R_3	S
T	0	0,6	0,4	0	0	0
OK	1	0	0	0	0	0
R_1	0	0,6	0	0,4	0	0
R_2	0	0,6	0	0	0,4	0
R_3	0	0,4	0	0	0	0,6
S	1	0	0	0	0	0

Nejdůležitější charakteristiky modelu kontrolního stanoviště.

a) střední délka taktu OK

b) střední délka taktu S

c) celková střední délka taktu $T \to T$

d) počet výrobků OK/jednotka času

e) počet zmetků S/jednotka času

f) pravděpodobnost výskytu zmetku S

Zadáním pravděpodobností přechodu pro vnořený markovský řetězec a zadáním rozdělení dob setrvávání v jednotlivých stavech jsou jednoznačně určeny pravděpodobnostní charakteristiky modelu. Tyto veličiny jsou i vstupy do možné simulace chodu stanoviště ve vhodném virtuálním prostředí.

Reference

[1] J. M. Ross: Applied Probability Models with Optimization Applications. Holden-Day, San Francisco, 1970.

[2] ČSN 01 0224: 1981 Aplikovaná statistika - Pravidla stanovení odhadů a konfidenčních mezí pro parametry Weibullova rozdělení.